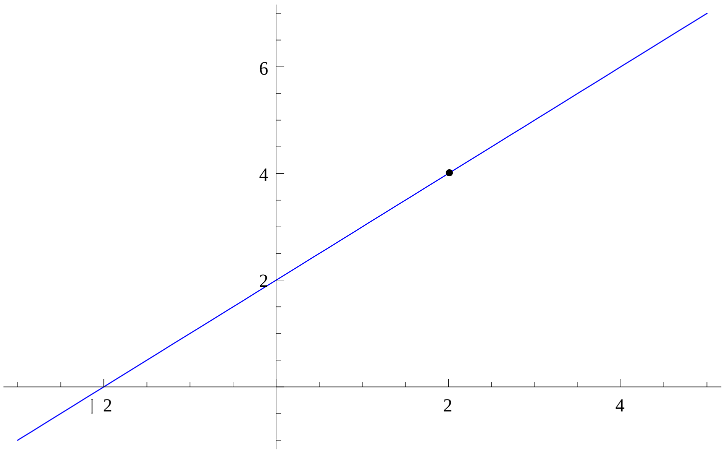
Limita funkce



$y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Obr.1

Příklad 1: Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Je tato funkce rovna funkci $g(x) = x + 2$? Ne, funkce f, g si nejsou rovny (nemají stejný definiční obor). Vzhledem k tomu, že funkce f není definována v bodě $x = 2$ (viz obr. 1 – na grafu „vypadl“ černě vyznačený bod) by nás mohlo zajímat, co se s funkčními hodnotami stane, když se budeme „blížit“ k číslu $x = 2$. Je např. $f(1) = 3$, $f(3) = 5$, $f(1{,}9) = 3{,}9$, $f(2{,}1) = 4{,}1$, $f(1{,}99) = 3{,}99$ atd. Zdá se tedy, že pokud se x blíží k číslu 2, blíží se funkční hodnoty $f(x)$ k číslu 4. Tuto okolnost zapisujeme $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ a hovoříme o **vlastní limitě** (protože se rovná reálnému číslu) **ve vlastním bodě** (protože je počítána v bodě 2, což je reálné číslo). Tento pojem je nutno definovat obecně.

Definice 1 (**vlastní limita ve vlastním bodě**): Říkáme, že funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $b \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové kladné číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$ platí $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Poznámka:

Podmínku $x \in (c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$ lze přepsat např. jako $c - \delta < x < c + \delta$, $x \neq c$. Znázorněte – hovoříme o **prstencovém** (**redukovaném**) δ – okolí bodu c. Je také možno napsat pomocí absolutní hodnoty: $0 < |x - c| < \delta$.

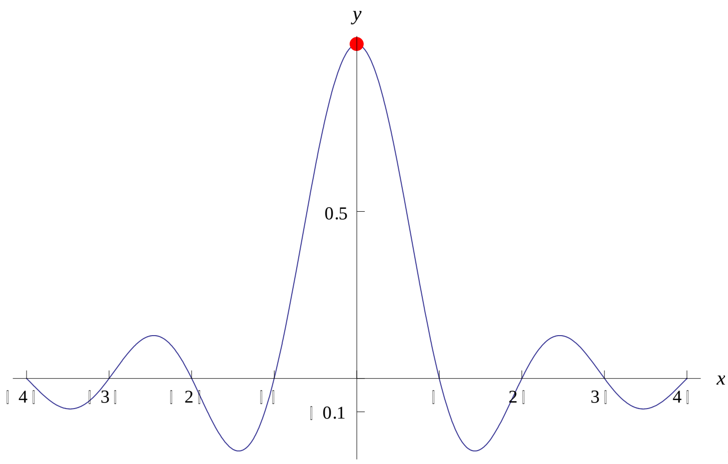
Je také možné přepsat podmínku $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ jako $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ nebo též pomocí absolutní hodnoty: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

V úvodním příkladu jsme si všimli, že existence limity a její hodnota vůbec nezávisí na tom, zda a jak je funkce definována v bodě $x = 2$. Obecně záleží jen na chování funkce f v jistém redukovaném okolí bodu c. Říkáme, že limita je **lokální vlastnost funkce**.

Příklad 2: Vraťme se k příkladu 1 a volme $\varepsilon = 1$ (kreslete!). Nalezněte odpovídající $\delta > 0$. Totéž pro $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}05$ atd.

Vyjde $\delta = 1$, $\delta = 0{,}1$, $\delta = 0{,}05$, obecně v příkladu 1 platí $\delta = \varepsilon$.

Příklad 3: Podobná situace jako v příkladu 1 nastává i u funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ (viz obr. 2). Tato funkce není definována v bodě $x = 0$ (červený bod), ale má tu vlastnost, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Důležitá limita!

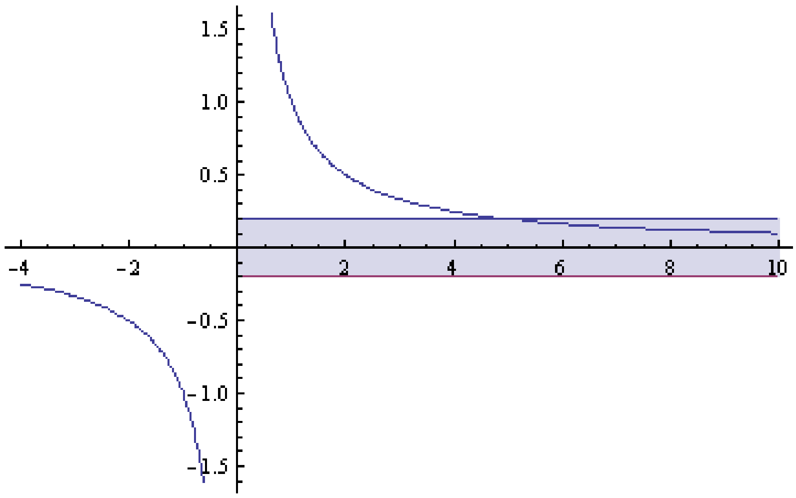


Obr. 2

Dále bychom byli ochotni říci, že pro $x \to \infty$ a také pro $x \to -\infty$ se funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ blíží k nule. Psali bychom $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin(x)}{x} = 0$. Jenže tady jde již o vlastní limity funkce v **nevlastních bodech** ∞ , $-\infty$. Uveďme jednodušší příklad.

Příklad 4: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Tento výsledek je ve shodě s tím, co víme o posloupnostech.

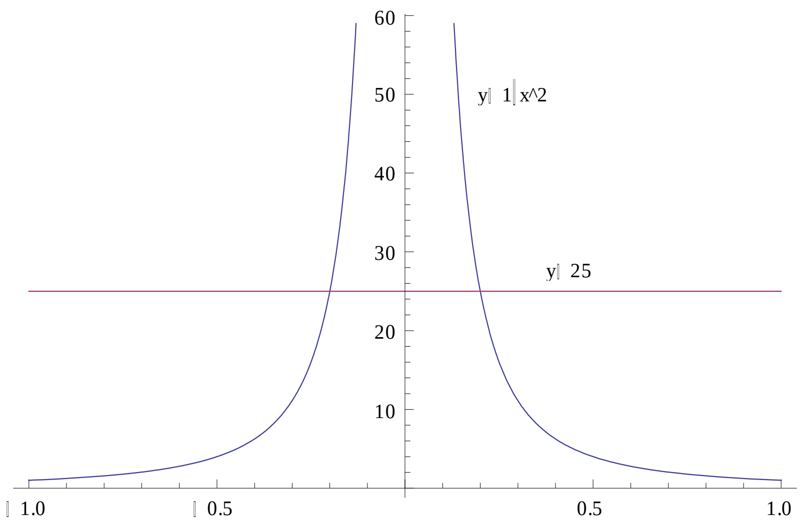
Pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x > x_0$ platí $-\varepsilon < \dfrac{1}{x} < \varepsilon$ (na obr. 3 je voleno $\varepsilon = 0{,}2$). Nahlížíme, že nyní je $x_0 = 5$: pro $x > 5$ se již graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$ nachází uvnitř vybarvené oblasti:



Obr. 3

Definice 2 (**vlastní limita v nevlastním bodě**): Říkáme, že funkce f má v bodě ∞ (resp. $-\infty$) limitu $b \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové kladné číslo x_0, že pro všechna $x > x_0$ (resp. $x < x_0$) platí $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, tj. $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Definice 3 (**nevlastní limita ve vlastním bodě**): Říkáme, že funkce f má v bodě c limitu ∞ (*resp.* $-\infty$), jestliže ke každému kladnému číslu $K > 0$ (*resp. ke každému zápornému* $k < 0$) existuje takové kladné číslo δ, že pro všechna $x \in (c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$ platí $f(x) > K$ ($f(x) < k$).



Obr. 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (-\delta, \delta), x \neq 0 \text{ platí } \frac{1}{x^2} > K.$$

Kdybychom např. vzali $K = 25$, pro která $x \in \mathbb{R}$ by platilo $\frac{1}{x^2} > 25$? Rovnost $\frac{1}{x^2} = 25$ nastává pro $x_{1/2} = \pm \frac{1}{5}$ a $\frac{1}{x^2} > 25$ platí pro $x \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $x \neq 0$. Tedy můžeme položit $\delta = \frac{1}{5}$.

Definice 4 (**nevlastní limita v nevlastním bodě**):

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \quad \exists x_0 \quad \forall x < x_0$ platí $f(x) > K$.

Další případy sami!

Příklad: Je $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \quad \exists x_0 \quad \forall x < x_0$ platí $x^4 > K$. Např. pro $K = 1$ bychom mohli volit $x_0 = -1$, pro $K = 100$ zase $x_0 = -\sqrt{10}$.

Definice 4 (**jednostranné limity**):

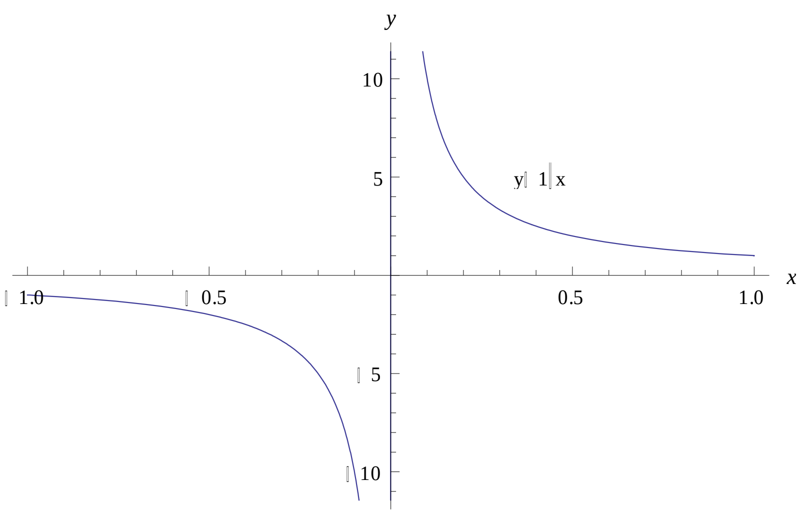
a) Řekneme, že funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu zprava rovnu $b \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (c, c + \delta)$ platí

$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Zapisujeme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = b$.

b) $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = b$ analogicky sami. Podobně pro nevlastní limity zleva (zprava).

Příklad: Je $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$!



Obr. 5

Věta: Oboustranná limita $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$ existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ a jsou si rovny.

Věty o limitách funkcí

Věta 1: Existuje –li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, pak je jediná.

Věta 2: Mají –li funkce f, g limitu v bodě a a je –li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$, potom mají v bodě a limitu i funkce dané rovnicemi $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x).g(x)$ a platí

a) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = b + c$,

b) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x).g(x) \right) = b.c$.

Je –li navíc $c \neq 0$, má v bodě a limitu i funkce daná rovnicí $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Poznámka: Tvrzení a), b) věty lze zobecnit i na více členů.

Příklad: Vypočtěte a) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t^3 + 3t^2 - 5t}{5t}$, b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{3\left(x^2 - 1\right)}$.

Řešení: a) Na výpočet $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t^3 + 3t^2 - 5t}{5t}$ nemůžeme užít tvrzení c) předchozí věty, neboť limita jmenovatele je rovna nule. Ale pro každé $t \neq 0$ je $\dfrac{2t^3 + 3t^2 - 5t}{5t} = \dfrac{2t^2 + 3t - 5}{5}$ a protože limita závisí na chování funkce v **prstencovém** okolí bodu 0, je $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t^3 + 3t^2 - 5t}{5t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t^2 + 3t - 5}{5} = \dfrac{-5}{5} = -1$.

b) Opět nelze přímo užít „větu limitě podílu“, neboť dostáváme neurčitý výraz „$\frac{0}{0}$“.

Upravujme tedy limitovaný výraz: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{3\left(x^2-1\right)} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{3(x-1)} =$

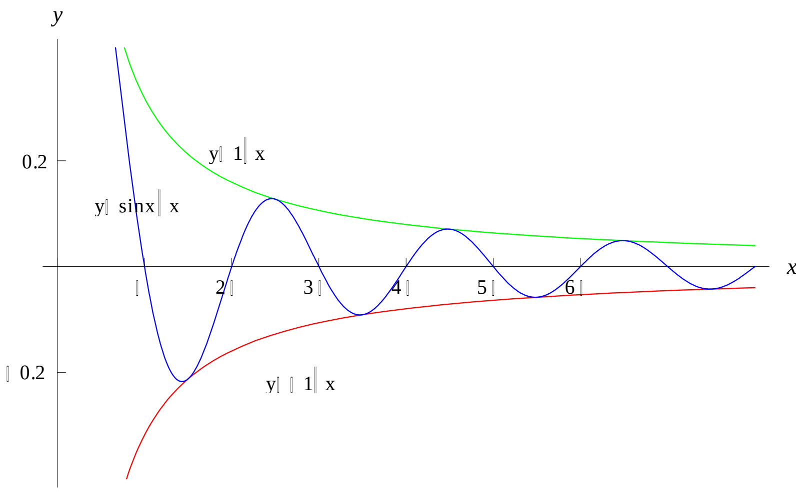
$\dfrac{-1}{3.(-2)} = \dfrac{1}{6}$.

Věta 3: Jestliže pro všechna x z jistého okolí $(c - \alpha,\ c + \alpha)$, $x \neq c$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = b \in \mathbb{R}$, pak $a \leq b$.

Ale pozor, pokud platí pro funkce f, g ostrá nerovnost, pak může limitováním přejít v rovnost. Kupř. je $1 - x^2 < 1 + x^2$ pro všechna $x \neq 0$. Přitom ale $\lim\limits_{x\to0}\left(1 - x^2\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to0}\left(1 + x^2\right) = 1$.

Věta 4 (o limitě sevřené funkce): Jestliže pro všechna x z jistého okolí $(c - \alpha,\ c + \alpha)$, $x \neq c$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a existují limity $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = a \in \mathbb{R}$, pak existuje také limita $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$.

Poznamenejme, že uvedené věty platí rovněž pro jednostranné limity a pro limity v nevlastních bodech. Jejich modifikaci ponecháme čtenáři. Následující větu 5 vyslovíme kupř. pro limity zprava. Určitou modifikací věty 4 vyřešíme následující příklad (viz obr. 6).



Obr. 6

Příklad: Ukážeme, že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0$. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-1 \le \sin x \le 1$, odtud dostáváme vydělením $x > 0$ nerovnosti $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin(x)}{x} \le \frac{1}{x}$. Je $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$, a proto podle věty limitě sevřené funkce též $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0$.

Z faktu, že funkce má v jistém bodě nenulovou limitu, lze něco usoudit o znaménku funkce v jistém okolí toho bodu. Vyslovme odpovídající tvrzení např. pro jednostranné limity.

Věta 5: a) Jestliže $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, pak existuje pravé okolí $(c, c+\delta)$ bodu c tak, že $f(x) > 0$ pro všechna x z tohoto okolí.

b) Jestliže $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, pak existuje levé okolí $(c-\delta, c)$ bodu c tak, že $f(x) < 0$ pro všechna x z tohoto okolí.

Věta 6 (**o limitě složené funkce**):

Buďte c, d, k reálná čísla.

Nechť $\lim\limits_{x\to c} g(x) = d$ (1)

a nechť $\lim\limits_{y\to d} f(y) = k$. (2)

Nechť existuje $\alpha > 0$ takové, že pro všechna $x \in (c-\alpha, c+\alpha)$, $x \ne c$ platí

$$g(x) \ne d. \tag{3}$$

Potom $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = k$.

Poznámka 1: Následující příklad ukazuje, že předpoklad (3) nelze vynechat.

Příklad: Nechť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $g(x) = 0$, dále budiž $f(y) = 10$ pro $y \ne 0$, $f(0) = 0$. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(g(x)) = 0$ a tato konstantní funkce má dokonce v kterémkoli bodě limitu 0, tedy též $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 0$.

Povrchní „užití“ předchozí věty bez předpokladu (3) by vedlo k chybě: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, tj. $d = 0$; $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 10$, „$\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 10$“!!

Spojitost funkce v bodě

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a, jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Komentář: Aby mohla být splněna podmínka z definice, musí jednak existovat limita funkce v bodě a, jednak funkční hodnota $f(a)$ – tedy funkce f musí být definována v bodě a a v jistém jeho okolí.

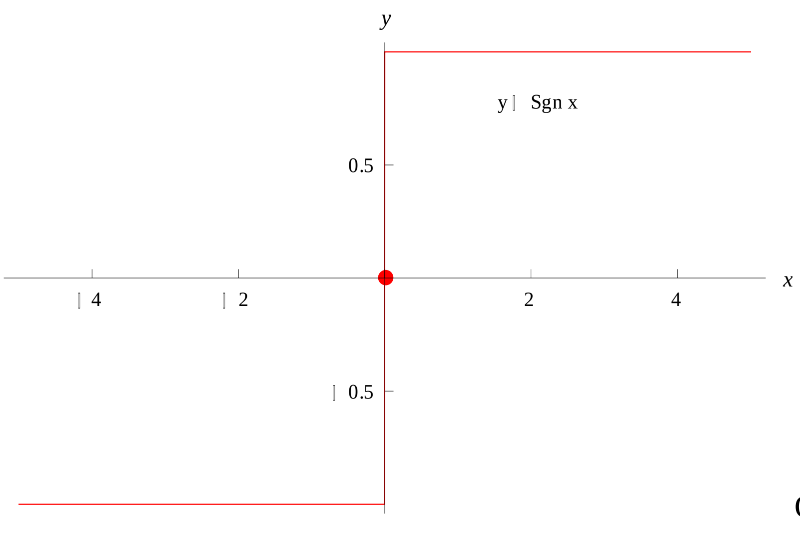
Definice: Řekneme, že funkce f je v bodě a spojitá zprava, jestliže $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$. Obdobně řekneme, že funkce f je v bodě a spojitá zleva, jestliže $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Definice: Nechť f je funkce definovaná v jistém prstencovém okolí bodu a. a) Nechť $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R}$ a nechť $f(a)$ buď neexistuje, nebo není rovna společné hodnotě obou limit. Pak říkáme, že bod $x = a$ je **bodem odstranitelné nespojitosti** funkce f.

b) Nechť existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = c \in \mathbb{R}$ a nejsou si rovny. Pak říkáme, že bod $x = a$ je **bodem nespojitosti 1. druhu** funkce f. Funkce f zde má skok $c - b$.

c) Pokud alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje, nebo aspoň jedna je nevlastní, pak říkáme, že bod $x = a$ je **bodem nespojitosti 2. druhu** funkce f.

Na obr. 7 je znázorněn graf funkce $y = \operatorname{sgn} x$ (připomeňme, že tato funkce (signum – znaménko) přiřazuje každému číslu $x < 0$ hodnotu -1, číslu 0 hodnotu 0, každému číslu $x > 0$ hodnotu 1. Tato funkce není spojitá v bodě 0, neboť $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$. Bod $x = 0$ je bodem nespojitosti prvního druhu se skokem 2.



Obr. 7

Spojitost funkce f v bodě a se definovala s využitím limity. Proto získáváme snadno následující větu.

Věta 1' (důsledek V 1 pro limitu funkce):

Nechť funkce f, g jsou spojité v bodě a. Pak jsou v bodě a spojité i funkce dané rovnicemi $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x).g(x)$ a pokud je navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Příklad: Konstantní funkce a funkce $y = x$ jsou zřejmě spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. Vzhledem k tomu se snadno nahlédne, že polynom (tj. funkce $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$) je funkcí spojitou v každém bodě. Racionální lomená funkce $r(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy, je spojitá v každém bodě kromě těch, v nichž je jmenovatel roven nule.

Věta (**o spojitosti složené funkce**): Je –li funkce g spojitá v bodě x_0 a funkce f spojitá v bodě $z_0 = g(x_0)$, je složená funkce $y = f(g(x))$ spojitá v bodě x_0.

Věta: Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou spojité v každém bodě.

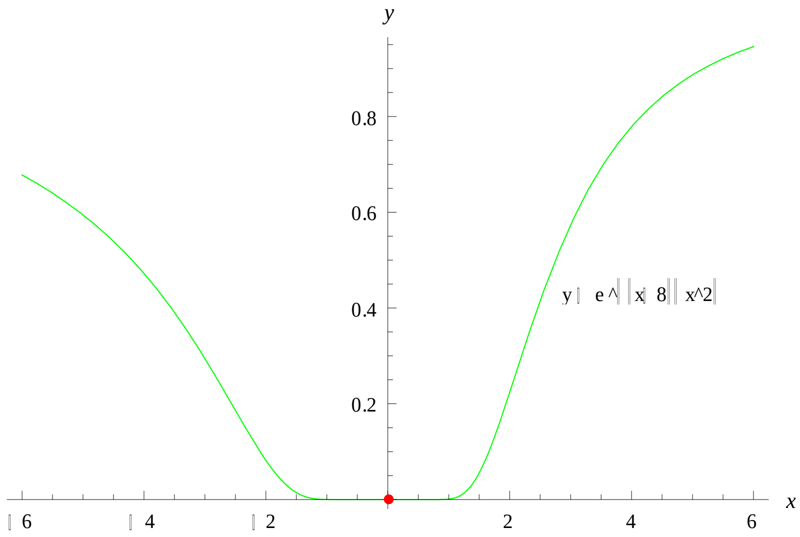
Důsledek: Funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ a $y = \mathrm{cotg}\, x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru, tj. funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ je spojitá v každém bodě $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, funkce $y = \mathrm{cotg}\, x$ je spojitá v každém bodě $x \neq k\pi$, kde k je celé číslo.

Věta: Funkce $y = e^x$ je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Definice: Jestliže je funkce f spojitá v každém bodě nějakého intervalu J, říkáme, že je **spojitá v intervalu** J.

Poznámka: Patří –li k intervalu J některý z jeho krajních bodů, pak ovšem spojitostí funkce f v tomto bodě rozumíme příslušnou jednostrannou spojitost (tj. spojitost zleva či zprava podle polohy uvažovaného bodu). Tedy např. f je spojitá v $\langle a, b\rangle$, jestliže je spojitá každém vnitřním bodě tohoto intervalu a navíc v bodě a zprava, v bodě b zleva.

Příklad: Je dána funkce $f(x) = e^{\frac{x-8}{x^2}}$. Určete body nespojitosti této funkce a jejich typ.



Řešení: Jde o složenou funkci: vnitřní funkce h: $z = \frac{x-8}{x^2}$ je racionální lomená, vnější funkce g: $y = e^z$ je exponenciální. Funkce $h(x) = \frac{x-8}{x^2}$ je definována a spojitá v každém bodě $x \neq 0$, vnější funkce g je spojitá v každém bodě z. Je tedy složená funkce f spojitá v každém bodě $x \neq 0$. Jediným bodem nespojitosti je bod $x = 0$. Vypočteme jednostranné limity $\lim\limits_{x \to 0-} e^{\frac{x-8}{x^2}}$, $\lim\limits_{x \to 0+} e^{\frac{x-8}{x^2}}$.

Je $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{x-8}{x^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} e^{\frac{x-8}{x^2}} = 0$ a obdobně $\lim\limits_{x \to 0+} e^{\frac{x-8}{x^2}} = 0$. To znamená, že bod $x = 0$ je **bodem odstranitelné nespojitosti.**

Věta (spojitost inverzní funkce): Je –li funkce f spojitá a ryze monotónní v jistém intervalu J, pak funkce g, inverzní k funkci f, je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad: Funkce $y = e^x$ je spojitá a ostře rostoucí v $(-\infty, \infty)$, který zobrazuje na $(0, \infty)$. Inverzní funkce $y = \ln x$ je spojitá každém bodě intervalu $(0, \infty)$.

Věta (o nulové hodnotě spojité funkce): Nechť funkce f je spojitá v $\langle a, b \rangle$ a funkční hodnoty $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka (tj. součin $f(a) \,.\, f(b) < 0$). Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

Důsledek (řešitelnost rovnic $y = f(x)$):

Nechť f je spojitá v $\langle a, b\rangle$, $f(a) \neq f(b)$ a y leží mezi $f(a)$, $f(b)$. Potom existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že x_0 je řešením rovnice $y = f(x)$.

Příklad: Ukažte, že rovnice $x^3 - 7x + 5 = 0$ má jeden kořen v intervalu $(0, 1)$ a určete tento kořen na dvě platné číslice.

Řešení: Funkce $f(x) = x^3 - 7x + 5$ je spojitá v $\langle 0, 1\rangle$ - jde o polynom, tj. funkci spojitou v každém bodě. Dále $f(0) = 5$, $f(1) = -1$. Podle výše uvedené věty o nulové hodnotě spojité funkce existuje $c \in (0, 1)$ tak, že $f(c) = 0$. Jelikož $f(1/2) = 13/8 > 0$, je možno říci, že $c \in (1/2, 1)$ atd. – metoda půlení intervalu. Další postup je zřejmý.

Věta (Weierstrassova): Jestliže je funkce f **spojitá** v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak v tomto intervalu nabývá své nejmenší i největší funkční hodnoty, tj. v $\langle a, b\rangle$ existují taková čísla c, d, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$. Tedy funkce spojitá na uzavřeném intervalu je **omezená**.

Odtud již plyne závěr:

Funkce spojitá a nekonstantní v uzavřeném intervalu zobrazuje tento interval opět na uzavřený interval.