ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

www.KMA.zcu.cz SINCE 1954

Modely proudění v řekách

M. Brandner, J. Egermaier, H. Kopincová

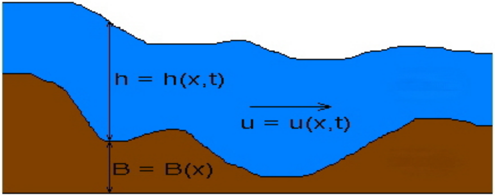
Department of Mathematics
Faculty of Applied Sciences, University of West Bohemia, Plzeň

snm2 19.2.2009

- Matematický model
- Metody konečných diferencí

Základní matematický model

Rovnice proudění v 1D



- obdélníkový průřez koryta
- $h = h(x,t)$ ... neznámá hloubka vody
- $u = u(x,t)$ ... neznámá rychlost proudění; $q = hu$ ... průtok
- $B = B(x)$ ... funkce popisující tvar dna
- $g = 9.81 m s^{-2}$ ... gravitační konstanta

Základní matematický model

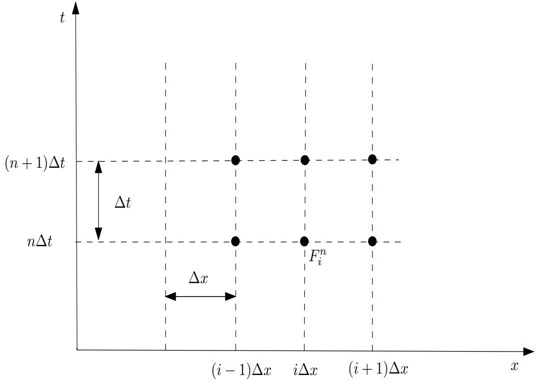
Rovnice proudění v 1D – Shallow water equation, Saint–Venantovy rovnice

$$
\begin{aligned}
h_t + (hu)_x &= 0 \\
(hu)_t + \left(hu^2 + \tfrac{1}{2}gh^2\right)_x &= 0
\end{aligned}
$$

- Soustava homogenních nelineárních hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic 1. řádu
- Rovnice vyjadřující proudění v řece s rovným dnem
- Zákon zachování

Metody konečných diferencí

Diskretizace



- Prostorová diskretizace s krokem Δx
- Časová diskretizace s krokem Δt

Metody konečných diferencí

- Náhrada derivací za konečné diference: $\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t}$, $\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$

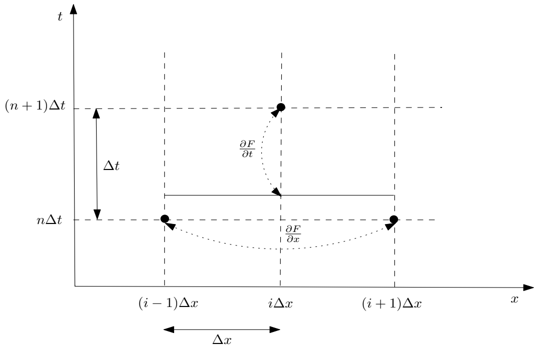
Příklady volby konečných diferencí

1.
   - $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t}$, $\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}$
   - Nestabilní pro libovolné Δx a Δt
2.
   - $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F_i^{n+1} - \frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_{i-1}^n)}{\Delta t}$, $\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}$
   - Stabilní pro $Cr \leq 1$, kde $Cr = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ ... Courantovo číslo (konverguje k exaktnímu řešení)

Metody konečných diferencí – explicitní schémata

Laxovo schéma

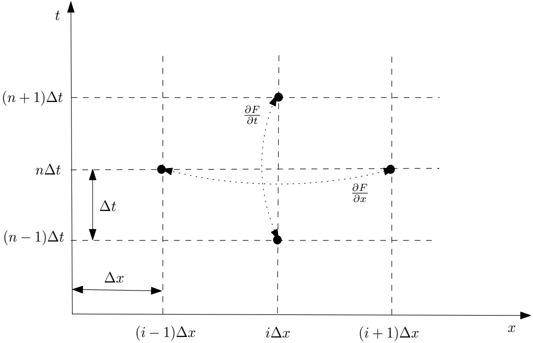
- $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F_i^{n+1} - \left(\alpha F_i^n + (1-\alpha)\frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_{i-1}^n)\right)}{\Delta t}$, $\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}$
- Stabilita pro $0 \leq \alpha < 1$ a $Cr \leq 1$



Metody konečných diferencí – explicitní schémata

Leap–frog schéma

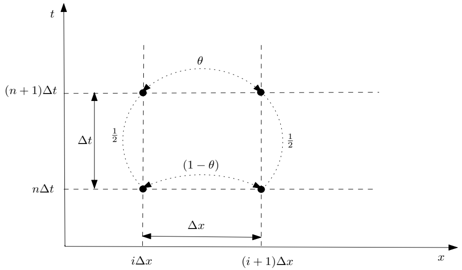
- $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F_i^{n+1} - F_i^{n-1}}{2\Delta t}$, $\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}$
- Stabilita pro $Cr \leq 1$



Metody konečných diferencí – implicitní schémata

Preissmannovo–Cungeho schéma

- $F(x,t) \approx \frac{\theta}{2}\left(F_{i+1}^{n+1} + F_i^{n+1}\right) + \frac{1-\theta}{2}\left(F_{i+1}^{n} + F_i^{n}\right)$
  $\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{F_{i+1}^{n+1}-F_{i+1}^{n}}{\Delta t} + \frac{F_{i}^{n+1}-F_{i}^{n}}{\Delta t}\right)$
  $\frac{\partial F}{\partial x} \approx \theta\frac{F_{i+1}^{n+1}-F_{i}^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta)\frac{F_{i+1}^{n}-F_{i}^{n}}{\Delta x}$
- θ váhový parametr, nepodmíněně stabilní pro $0.5 \le \theta \le 1$



Metody konečných diferencí

Explicitní schémata

- Jednoduché
- Okrajové podmínky problematické
- Kritérium stability

Implicitní schémata

- Stabilita schémat
- Výpočet nespojitostí

References

H. Chanson: *Environmental Hydraulics of Open Channel Flows*. Elsevier Butterworth–Heinemann, 2004, ISBN: 0–7506–6165–8